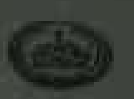
جامعة البعث - كلية العلوم
قسم الرياضيات - السنة الأولى



امتحان مقرر الهندسة التحليلية للفصل الثالث 2017
المدة ساعتان - الدرجة 100 - اسم الطالب ورقمه:

السؤال الأول (56 درجة): اختر رمز الإجابة الصحيحة لكل من الأسئلة الآتية:

1) تقع النقاط $A(4,-1,4)\,,B(0,7,-4),C(3,1,-2)$:

A) على استقامة واحدة والنقطة A بينية،
B) على استقامة واحدة والنقطة B بينية،
C) على استقامة واحدة و النقطة C بينية،
D) على رؤوس مثلث.

2) تتقاطع المستويات المعيّنة بالمعادلات:

$$5x-y-z=0\ ,\quad x+2y+3z=14\ ,\ 4x+3y+2z=16$$

A) بنقطة وحيدة ، B) بعدد غير منته من النقاط، C) مثنى مثنى ، D) غير ذلك

3) تمثل المعادلة $x+2y-2=0$ في:

A) الفضاء الثلاثي مستوياً عاماً وفي المستوي مستقيماً خاصاً، B) الفضاء الثلاثي مستوياً خاصاً وفي المستوي مستقيماً عاماً،
C) الفضاء الثلاثي مستوياً عاماً وفي المستوي مستقيماً عاماً ، D) غير ذلك.

4) تمثل المعادلة $z=c$ في الفضاء الثلاثي:

A) المستوي الإحداثي oxy ، B) مستوياً $\pi \perp oxy$ ، C) مستوياً $\pi \parallel oxy$ ، D) غير ذلك.

5) يعطى المستوي المار بالنقطتين: $A(2,0,0)\ ,B(0,2,0)$ والعمودي على المستوي الإحداثي oxy بالمعادلة:

A) $x+y=0$ ، B) $x-y-2=0$ ، C) $x+y+2=0$ ، D) $x+y-2=0$.

6) إن النقطة المتناظرة مع النقطة $M_1(1,2,1)$ بالنسبة للمستوي $x+y+z-7=0$ هي النقطة:

A) $M_2(3,4,3)$، B) $M_2(-3,-4,-3)$، C) $M_2(3,-4,3)$، D) $M_2(-3,4,-3)$.

7) إن مسقط النقطة $A(1,2,-1)$ على المستوي $\pi:3x-5y+4z-5=0$ هو النقطة:

A) $A'\left(\frac{5}{3},0,0\right)$ B) $A'(0,-1,0)$ C) $A'\left(\frac{49}{25},\frac{2}{5},\frac{7}{25}\right)$ D) $A'\left(0,\frac{1}{25},\frac{4}{25}\right)$.

8) إذا كانت النقاط: $M_1(2,0,0),M_2(0,2,0),M_3(0,0,2)$ رؤوساً لقاعدة هرم ثلاثي فمسقط رأسه O على قاعدته هو:

A) $O'\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ ، B) $O'\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ ، C) $O'(-2,-2,-2)$ ، D) $O'(2,2,2)$.

السؤال الثاني (44 درجة): حل المسألتين الآتيتين:

1– أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم، المار بالنقطة $M_0(2,-4,-1)$ ويمنتصف قطعة المستقيم:

$$l_0: x-1=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$$

المحصورة بالمستويين: $\pi_1:2x+3y+z-1=0\ ,\ \pi_2:2x+y+z+5=0$.

2– أوجد معادلتي المستقيم العمود المشترك للمستقيمين:

$$l_1:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-1}\ ,\ l_2\begin{cases}2x+y+2z+1=0\\x+y+z-1=0\end{cases}$$

حمص 2017 مع تمنياتي لكم بالنجاح مدرس المقرر د. عصام ديبان

دورة الفصل الثالث للعام 2017 في
مادة الهندسة التحليلية

السؤال الأول:

1) لمعرفة وضع هذه النقاط المعطاة في الفرض نقوم بتشكيل شعاعين من هذه النقاط و نأخذ الجداء الخارجي لهما فإذا كان الجداء معدوم فإن النقاط تقع على استقامة واحدة أما إذا كان غير معدوم فالنقاط تقع على رؤوس مثلث

نلاحظ

$\vec{AB}(-4, 8, -8)$ $\vec{AC}(-1, 2, -6)$

$$\Rightarrow \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & -8 \\ -1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= (-48+16)\vec{i} - (24-8)\vec{j} + (-8+8)\vec{k}$$

$$= -32\vec{i} - 16\vec{j} + 0\vec{k} \neq 0$$

وبالتالي فإن النقاط تقع على رؤوس مثلث وبالتالي الجواب الصحيح هو [D]

2) نلاحظ من الفرض أنّ

$\vec{n}_1(5,-1,-1)$ $\vec{n}_2(1,2,3)$ $\vec{n}_3(4,3,2)$

وبالتالي نوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$$

وبالتالي بما أن $\Delta \neq 0$ فإن المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة ويكون الجواب الصحيح هو [A]

ملاحظة: راجع الفقرة في الصفحة 125 من الكتاب

3] واضح أن الجواب الصحيح هو [B] أي أن المعادلة في الفضاء الثلاثي تشكل مستوي خاص وليس مستوي عام وذلك لأن $r=0$ أي الـ rz معدوم وفي المستوي هي معادلة مستقيم من الشكل $ax+by=c$ حيث $a=1$ $b=2$ $c=+2$

4] الجواب الصحيح هو [B] مستوية $\pi \perp oxy$

5] فكرة الحل هي أن نحول المعادلة إلى معادلة مستوي مار من نقطة و يوازي معينين

نلاحظ في الدارة أن المستوي يوازي القطعة المستقيمة $\vec{AB}(-2,2,0)$ وهذا هو أول معين

أما المعين الثاني نحصل عليه بالشكل التالي: بما أن المستوي عمودي على oxy فإنه يوازي ناظم هذا المستوي والذي هو $\vec{n}(0,0,1)$

وبالتالي تحولت المسألة إلى إيجاد معادلة مستوي مار من النقطة $A(2,0,0)$ ويوازي المعينين $\vec{n}(0,0,1)$ $\vec{AB}(-2,2,0)$

وهي من الشكل

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبالتالي بفك هذا المحدد نجد

$$x + y - 2 = 0$$

وبالتالي الجواب الصحيح هو الخيار [D]

6] لإيجاد نظيرة نقطة بالنسبة لمستوي نحل العلاقات التالية:

$$\frac{x_2 - x_1}{p} = \frac{y_2 - y_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{r} \quad (*)$$

$$p\,\frac{x_2 + x_1}{2} + q\,\frac{y_2 + y_1}{2} + r\,\frac{z_2 + z_1}{2} + h = 0 \quad (*)'$$

حيث أن $M_1(x_1 = 1,\ y_1 = 2,\ z_1 = 1)$ معطاة مرجعاً

وبالتالي بالتعويض في العلاقات السابقة نجد

بالتعويض في $(*)'$ نجد

$$\frac{x_2 + 1}{2} + \frac{y_2 + 2}{2} + \frac{z_2 + 1}{2} - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_2 + y_2 + z_2 - 10 = 0 \quad (1)$$

أما من العلاقات $(*)$ نجد.

نأخذ النسبتين الأولى والثانية ونعوض النقطة M_1

$$\frac{x_2 - 1}{1} = \frac{y_2 - 2}{1} \Rightarrow x_2 - y_2 + 1 = 0 \quad (2)$$

نأخذ النسبتين الأولى والثالثة نجد

$$\frac{x_2 - 1}{1} = \frac{z_2 - 1}{1} \Rightarrow x_2 - z_2 = 0 \quad (3)$$

وبالتالي نحل المعادلات (1) (2) (3) حل مشترك

نجد

من (2) نجد $y_2 = x_2 + 1$

من (3) نجد $z_2 = x_2$

نعوض في (1) نجد

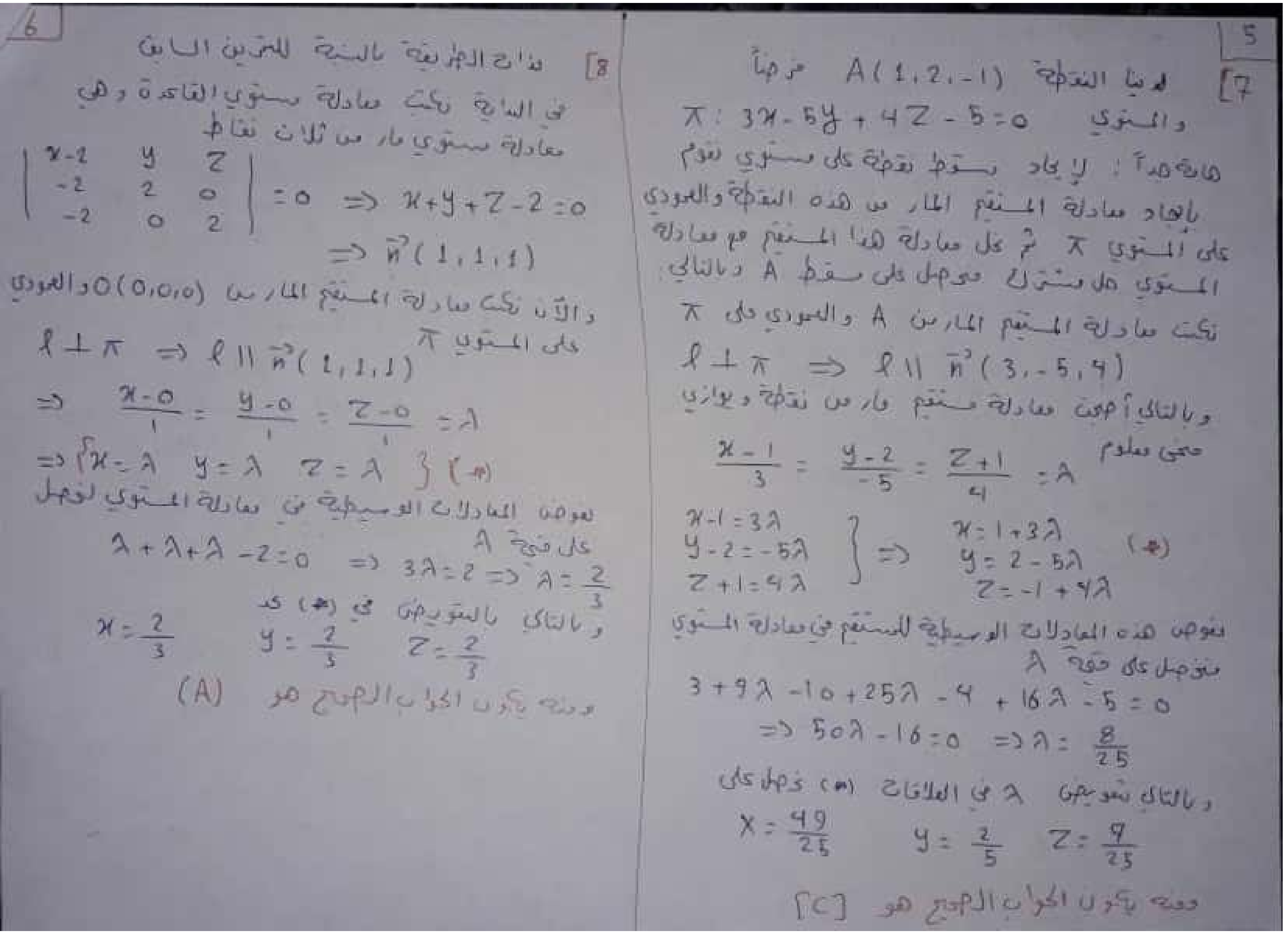
$$x_2 + x_2 + 1 + x_2 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 3x_2 - 9 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{3} = 3$$

وبالتالي $z_2 = 3$ $y_2 = 4$ ومنه نحصل

على النقطة $M_2(3, 4, 3)$

ويكون الجواب الصحيح هو (A)



[7] لدينا النقطة $A(1,2,-1)$ مرجعا

والمستوي $\pi : 3x - 5y + 4z - 5 = 0$

هاتة جدا : لإيجاد مسقط نقطة على مستوي نقوم

بإيجاد معادلة المستقيم المار من هذه النقطة والعمودي

على المستوي π ثم نحل معادلة هذا المستقيم مع معادلة

المستوي حل مشترك نحصل على مسقط A وبالتالي

نكتب معادلة المستقيم المار من A والعمودي على π

$l \perp \pi \Rightarrow l \parallel \vec{n}(3,-5,4)$

وبالتالي أصبح معادلة مستقيم مار من نقطة ويوازي

متجه معلوم

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{4} = \lambda$$

$$\left.\begin{matrix} x-1 = 3\lambda \\ y-2 = -5\lambda \\ z+1 = 4\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1+3\lambda \\ y = 2-5\lambda \\ z = -1+4\lambda \end{matrix} \quad (*)$$

نعوض هذه المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي

نتوصل على قيمة λ

$$3 + 9\lambda - 10 + 25\lambda - 4 + 16\lambda - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 50\lambda - 16 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{25}$$

وبالتالي بتعويض λ في العلاقات $(*)$ نحصل على

$$x = \frac{49}{25} \qquad y = \frac{2}{5} \qquad z = \frac{7}{25}$$

ومنه يكون الجواب الصحيح هو [C]

[8] نتائج الجزئية بالنسبة للتمرين السابق

في السابق نكتب معادلة مستوي القاعدة وهي

معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}(1,1,1)$$

والآن نكتب معادلة المستقيم المار من $O(0,0,0)$ والعمودي

على المستوي π

$l \perp \pi \Rightarrow l \parallel \vec{n}(1,1,1)$

$$\Rightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} = \lambda$$

$$\Rightarrow \{x = \lambda \quad y = \lambda \quad z = \lambda\} \quad (*)$$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي لنحصل

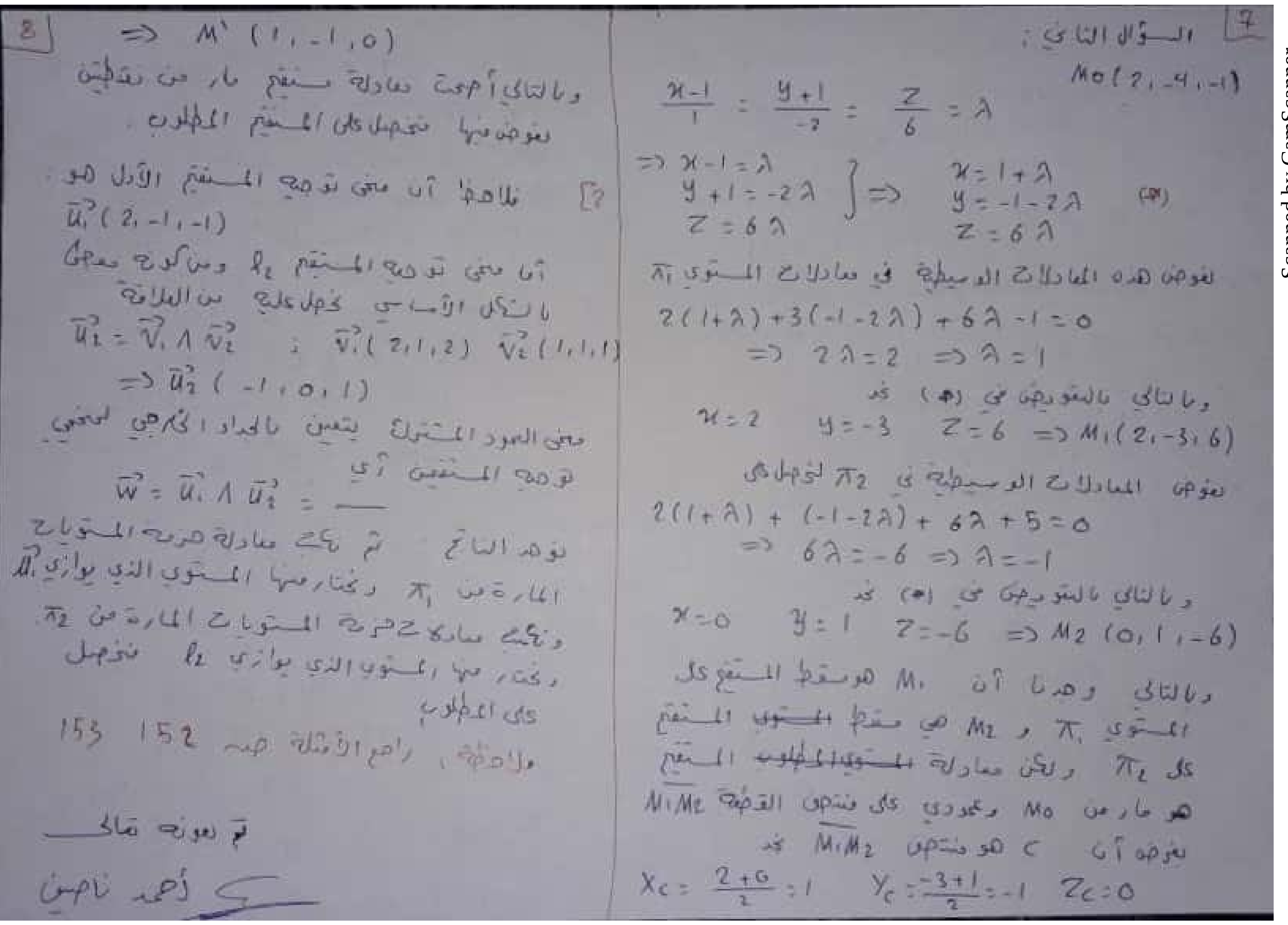
على قيمة λ

$$\lambda + \lambda + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

وبالتالي بالتعويض في $(*)$ نجد

$$x = \frac{2}{3} \qquad y = \frac{2}{3} \qquad z = \frac{2}{3}$$

ومنه يكون الجواب الصحيح هو (A)



السؤال الثاني:

$M_0(2,-4,-1)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=\lambda \\ y+1=-2\lambda \\ z=6\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=6\lambda \end{cases} \quad (*)$$

نعوض هذه المعادلات الوسيطية في معادلات المستوي π_1

$$2(1+\lambda)+3(-1-2\lambda)+6\lambda-1=0$$
$$\Rightarrow 2\lambda=2 \Rightarrow \lambda=1$$

وبالتالي بالتعويض في $(*)$ نجد

$x=2 \quad y=-3 \quad z=6 \Rightarrow M_1(2,-3,6)$

نعوض المعادلات الوسيطية في π_2 لنحصل على

$$2(1+\lambda)+(-1-2\lambda)+6\lambda+5=0$$
$$\Rightarrow 6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-1$$

وبالتالي بالتعويض في $(*)$ نجد

$x=0 \quad y=1 \quad z=-6 \Rightarrow M_2(0,1,-6)$

وبالتالي وجدنا أن M_1 هو مسقط المستقيم على المستوي π_1 و M_2 هي مسقط ~~المستوي~~ المستقيم على π_2 ولكن معادلة ~~المستوي المطلوب~~ المستقيم هو مار من M_0 وعمودي على منتصف القطعة M_1M_2

نفرض أن C هو منتصف $\overline{M_1M_2}$ نجد

$X_c=\frac{2+0}{2}=1 \quad Y_c=\frac{-3+1}{2}=-1 \quad Z_c=0$

$\Rightarrow M'(1,-1,0)$

وبالتالي أصبح معادلة مستقيم مار من نقطتين نعوض فيها نحصل على المستقيم المطلوب.

3) نلاحظ أن شعاع توجيه المستقيم الأول هو $\vec{u_1}(2,-1,-1)$

أما شعاع توجيه المستقيم l_2 وهو مكتوب بالشكل الأساسي نحصل عليه من العلاقة

$\vec{u_2}=\vec{v_1}\wedge\vec{v_2}$; $\vec{v_1}(2,1,2)$ $\vec{v_2}(1,1,1)$

$\Rightarrow \vec{u_2}(-1,0,1)$

شعاع العمود المشترك يتعين بالجداء الخارجي لشعاعي توجيه المستقيمين أي

$\vec{w}=\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}=$ ____

نوجد الناتج ثم نوجد معادلة حزمة المستويات المارة من π_1 ونختار منها المستوي الذي يوازي l_1 ونوجد معادلة حزمة المستويات المارة من π_2 ونختار منها المستوي الذي يوازي l_2 نتوصل إلى المطلوب

ملاحظة: راجع الأمثلة صـ 152 153

تم بعونه تعالى

أحمد ناصيف